全称状態のみの 1 方向交代性マルチプロセッサ有限オートマトンにおけるブール演算に関する閉包性

久本 純樹* 義永 常宏** 坂本 眞人***
(*ソニーデジタルネットワークアプリケーションズ) (**徳山工業高等専門学校) (***宮崎大学)

1 はじめに

マルチプロセッサ有限オートマトン(multi-processor finite automaton; MPFA)は複数の有限オートマトン(finite automaton; FA)とスイッチング関数により構成される最も単純な並列計算マシンモデルの 1 つと考えることができる.

文献[1], [2]では, 決定性および非決定性 MPFA に関する基本的な性質が, また文献[4]においては, 全称状態だけに制限された 1 方向交代性 MPFA に関する基本的な性質が, それぞれ報告されている.

本研究では, 文献[4]には記されていない全称状態のみの 1 方向交代性 MPFA のブール演算に関する閉包性について議論する.

2 定義と準備

2. 1 マルチプロセッサ有限オートマトン

MPFA は複数の FA と1つのスイッチング関数より構成され, 各 FA は各々並列に動作を行う. また, 各 FA をプロセッサとよぶ. 各プロセッサの有限状態集合を Q, プロセッサ数を k ($\geqq$ 1) とするとき, これらはスイッチング関数:

$h: \{ 1, 2, \ldots, k \} \times Q^k \rightarrow \{ 0, 1 \}$

の制御の下に動作・非動作が決定される. すなわち, 各 $1 \leqq l \leqq k$ に対し, $h(l, q_1, q_2, \ldots, q_k) = 1\ (= 0)$ のとき, 第 l 番目のプロセッサは動作(非動作)となる.

2. 2 決定性, 非決定性と交代性

あるマシンの次の計算状況への遷移が一意に定まる場合を決定性計算(deterministic computation)という.

これに対し, 次の遷移にいくつかの可能性があり, これらの中から1つを非決定的に選択していく場合を非決定性計算(nondeterministic computation)という.

交代性計算(alternating computation)では, 有限制御部の有限状態集合は全称状態(universal state)と存在状態(existential state)の互いに素である 2 つの部分集合に分割される. 全称状態においては, 現在のオートマトンを複数生成することで, 次の遷移の可能性を全て選択し, 以降の動作をそれぞれ独立かつ並列に行う. もう一方の存在状態においては, 遷移は複数の可能性の中から1つが非決定的に選択される. よって, 存在状態のみからなる交代性計算は, 非決定計算と捉えることができる. 一般に, 交代性計算では, 計算の開始状況を“根”とする“木”と捉えることができる. この木の“葉”にあたる計算状況が全て“受理”である時, その入力を受理すると定義される.

2. 3 記法

各 $k \geqq 1$, $X \in \{ \mathrm{D, N, U, A} \}$に対し, k 個の 1 方向 XFA により構成される MPFA を 1X(FA(k))と記す. ここで{ D, N, U, A } の D は決定性, N は非決定性, U は全称状態のみの交代性, A は交代性をそれぞれ表す. さらに, 1X(FA(k))により受理される言語のクラスを $\mathcal{L}$[1X(FA(k))] と表記する.

3 結果

1 方向 MPFA のブール演算に関する閉包性に関しては, 文献[1]において, 以下が示されている: 各 $k \geqq 2$ に対し,

- $\mathcal{L}$[1D(FA(k))]は, 和集合演算および共通集合演算について閉じておらず, 補集合演算については閉じているか否かは不明である.
- $\mathcal{L}$[1N(FA(k))]は, 和集合演算について閉じているが, 共通集合演算および補集合演算については閉じていない.

これらに対する本研究結果は以下である:

定理1: 各 $k \geqq 2$ に対し, $\mathcal{L}$[1U(FA(k))] は, 共通集合演算について閉じているが, 和集合演算および補集合演算について閉じていない.

(証明) 一般に全称状態のみの交代性マシンの受理言語のクラスが共通集合演算に関して閉じていることは明らかである.

次に, 各 $b \geqq 1$ および各 $1 \leqq r \leqq b$ に対し,

$T(b, r) = \{ w_1 2 w_2 2 \ldots 2 w_b 2 w_{b+1} 2 \ldots 2 w_{2b} \mid \forall i\, (1 \leqq i \leqq 2b)\ [w_i \in \{0, 1\}^*]\ \&\ w_r \neq w_{2b-r+1} \}$, および

$L(b) = \{ w_1 2 w_2 2 \ldots 2 w_b 2 w_{b+1} 2 \ldots 2 w_{2b} \mid \forall i\, (1 \leqq i \leqq 2b)\ [w_i \in \{0, 1\}^*]\ \&\ \exists j\, (1 \leqq j \leqq 2b)[w_j \neq w_{2b-j+1}] \}$

とする. このとき, 文献[1]の定理 4 の証明と同様に, 各 $k \geqq 2$ および各 $1 \leqq i \leqq k(k+1)/2$ に対し,

$T(k (k + 1)/2, i) \in \mathcal{L}[1\mathrm{U}(\mathrm{FA}(2))]$

であることが証明される. 一方, 文献[1]の補題 1, 文献[2]の定理 2.1 および文献[3]の定理 1 の証明の技法を応用することで,

$L(k (k + 1)/2) \notin \mathcal{L}[1\mathrm{U}(\mathrm{FA}(k))]$

となることが証明される. これらのことと

$\bigcup_{1 \leqq i \leqq k(k+1)/2} T(k (k + 1)/2, i) = L(k (k + 1)/2)$

であることから, 和集合演算に関する非閉包性が示される.

さらに, 上記のことおよびド・モルガンの法則により, 補集合演算に関する非閉包性も示される. □

4 おわりに

最後に本研究に関連する未解決問題を提示する:

- 各 $k \geqq 2$ に対し, $\mathcal{L}$[1A(FA(k))]は, 補集合演算に関して閉じているか?

(【注】$\mathcal{L}$[1A(FA(k))]が, 和集合演算および共通集合演算に関して閉じていることは明らかである.)

参考文献

[1] 角川裕次, 松野浩嗣, 井上克司, 高浪五男, “1 方向マルチプロセッサ有限オートマタのある性質,” IEICE, Vol. J75-D-I, No.11, pp.963—972, 1992.

[2] Buda A.C., “Multiprocessor automata,” Inform. Process. Lett., Vol. 25, pp.257—261, 1987.

[3] Yao A.C. and Rivest R.L., “k + 1 heads are better than k,” J.ACM, Vol. 25, No.2, pp.337—340, 1978.

[4] 久本純樹, 義永 常宏, 坂本 眞人, “全称状態のみの 1 方向交代性マルチプロセッサ有限オートマトン, ” 平成 27 年度(第 66 回)電気・情報関連学会中国支部連合大会.