カッコウ探索アルゴリズム調整型ガウシャンプロセスモデルによる Hammerstein システム同定

福島　輝　　八野 知博
(鹿児島大学)

1　はじめに

Hammerstein システムは、直列に接続された非線形静的要素と線形動的要素で表され、広範囲な非線形システムを表現できるモデルである。本稿では、ガウシャンプロセス (GP) モデル [1] による Hammerstein システムの同定法を提案する。また、GP モデルに含まれるパラメータをカッコウ探索アルゴリズム (CS) により準最適化する。シミュレーション実験により本同定法の有効性を確認する。

2　問題設定

次の Hammerstein システムで表される非線形システムを同定対象とする。

$$\begin{cases} A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})x(k-1) \\ x(k) = f(u(k)) + \varepsilon(k) \\ A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n} \\ B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_r q^{-r} \end{cases} \tag{1}$$

ここで、$u(k)$: 入力信号、 $y(k)$: 出力信号、$x(k)$: 中間信号、 $\varepsilon(k)$: 平均 0、分散 σ_n^2 の正規性雑音、 q^{-1} : 遅延演算子、 $f(\cdot)$: 未知の非線形関数である。また、n，r はそれぞれ $A(q^{-1})$、$B(q^{-1})$ の次数で既知とする。本稿では、入出力データから線形動的要素のシステムパラメータ $\{a_i\}, \{b_j\}$ と未知の非線形関数 $f(\cdot)$ 及びその信頼性を推定する。

3　GP による同定モデル

(1) 式において、$k = k_s + 1, k_s + 2, \cdots, k_s + N$ とすることにより、次の (2) 式の GP による同定モデルが得られる。

$$\boldsymbol{y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{m}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_a, \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) \tag{2}$$

ここで、

$$\begin{cases} \boldsymbol{y} = [y(k_s+1), y(k_s+2), \cdots, y(k_s+N)]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{u} = [u(k_s-r), u(k_s-r+1), \\ \qquad\qquad \cdots, u(k_s+N-1)]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\theta}_a = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{K}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}_{\bar{N}} \end{cases} \tag{3}$$

であり、$\boldsymbol{A}$ は出力信号から構成される行列、$\boldsymbol{B}$ は線形動的要素のシステムパラメータ $\{b_j\}$ から構成される行列である。$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{u})$ は平均関数ベクトル、$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ は共分散行列を表す。また、共分散行列の各要素を決める共分散関数として、(4) 式のガウシャンカーネルを用いる。

$$\Sigma_{pq} = s(u(k_p), u(k_q)) = \sigma_y^2 \exp\left(\frac{-|(u(k_p) - u(k_q))|^2}{2l^2}\right) \tag{4}$$

4　同定

同定精度は未知パラメータ $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_a^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\theta}_b^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\theta}_c^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ に大きく依存する。そこで本稿では、同定用入出力データに対する負の対数周辺尤度 J の最小化により未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を推定する。

$$\begin{aligned} J \;=\; & \tfrac{1}{2}\log|\mathcal{K}| + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_a)^{\mathrm{T}}\mathcal{K}^{-1} \\ & \times(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}_a) + \tfrac{N}{2}\log(2\pi) \end{aligned} \tag{5}$$

ここで、$\boldsymbol{\theta}_b = [b_0, b_1, \cdots, b_r]^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\theta}_c = [\sigma_y, l, \sigma_n]^{\mathrm{T}}$、$\mathcal{K} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ である。本稿では、$\boldsymbol{\theta}_b, \boldsymbol{\theta}_c$ を巣で表現し、最小二乗法と CS の組合せにより $\boldsymbol{\theta}$ を決定する学習アルゴリズムを提案する。CS はカッコウの托卵などの繁殖行動に着想を得た最適化アルゴリズムである。

step 1 : $\boldsymbol{\theta}_b, \boldsymbol{\theta}_c$ の初期候補集団 $\boldsymbol{X}$ の発生
step 2 : 共分散行列の構築
step 3 : $\boldsymbol{\theta}_a$ の最小二乗法による推定
step 4 : 負の対数周辺尤度 J に基づく $\boldsymbol{X}$ の評価値計算
step 5 : レヴィフライトに基づく新たな解候補の移動先決定
step 6 : 卵発見確率 P_a による解候補の放棄と新たな解候補のランダム生成
step 7 : 停止条件を満たさなければ *step* 2 へ戻る

ここで新たな入力データを $u_*(k)$ とすると、GP モデルの事後分布より対象システムの非線形関数は

$$\hat{f}(u_*(k)) = m(u_*(k)) + \boldsymbol{\Sigma}(u_*(k), \boldsymbol{u})\boldsymbol{K}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{m}(\boldsymbol{u})) \tag{6}$$

と推定される。ここで、$\hat{\boldsymbol{x}}$ は中間信号 $\boldsymbol{x}$ の推定値である。また、その共分散関数は

$$\begin{aligned} \hat{s}(u_*(k_p), u_*(k_q)) \;=\; & s(u_*(k_p), u_*(k_q)) \\ & - \boldsymbol{\Sigma}(u_*(k_p), \boldsymbol{u})\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}, u_*(k_q)) \end{aligned} \tag{7}$$

となり、推定非線形関数の尺度として用いられる。

5　数値シミュレーション

次の Hammerstein システムを同定対象とする。

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 + 0.8q^{-1} + 0.6q^{-2} \\ B(q^{-1}) = 0.4 + 0.2q^{-1} \\ f(u(k)) = -2\{\frac{1}{1+\exp(6(u(k)+1.2))} \\ \qquad\qquad + \frac{1}{1+\exp(6(u(k)-1.2))} - 1\} \\ x(k) = f(u(k)) + \varepsilon(k) \end{cases} \tag{8}$$

ここで $\varepsilon(k)$ は、平均 0、分散 0.07^2 の正規性雑音とした。線形部のパラメータは $\hat{a}_1 = 0.800$、$\hat{a}_2 = 0.602$、$\hat{b}_1 = 0.200$ と推定された。図 1 に推定非線形関数 $\hat{f}(u(k))$ 及びその信頼領域を示す。

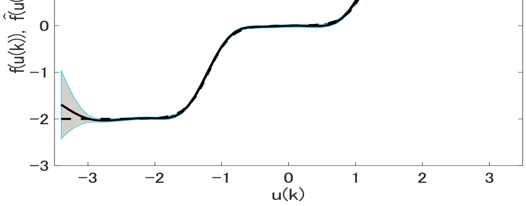

図 1 推定非線形関数

参考文献

[1] C. E. Rasmussen and C. K. I. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning*, MIT Press, 2006.