

# 粒子群最適化を用いた一次元離散時間力学系の分岐点導出法の拡張

富村 祐翔\* 黒川 弘章\*\* 松下 春奈\*\*\* 高坂 拓司\*

(\*大分大学) (\*\*東京工科大学) (\*\*\*)香川大学)

## 1 はじめに

非線形力学系の定性的性質の解明にはパラメータ空間における分岐集合の導出が重要である。Newton 法を用いない分岐点導出法として、先に我々は粒子群最適化 (PSO)[1] を用いた周期倍分岐点導出法を提案した [2]。また文献 [2] の手法をサドルノード (SN) 分岐に適用した場合、分岐点が正しく導出できない事を確認した [3]。

本稿では、文献 [2] で提案したアルゴリズムを SN 分岐点も導出できるように拡張する。また、提案アルゴリズムを一次元離散写像である Circle 写像に適用する。

## 2 分岐点導出アルゴリズムとその問題点

次の 1 次元写像を考える。

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda) \quad (1)$$

ここで  $f \in \mathbf{R}$  であり、 $x_k \in \mathbf{R}$  は状態変数、 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_r) \in \mathbf{R}^r$  はパラメータである。分岐点の導出には、周期点と分岐パラメータの二つに関する情報が必要となる。文献 [2] では、 $\text{PSO}_{\text{pp}}$  で周期点、 $\text{PSO}_{\text{bif}}$  で分岐パラメータを計算し、この 2 つの PSO を繰り返す事で周期倍分岐点を導出する手法を示した。しかし、文献 [2] の手法を用いて SN 分岐点の導出を試みた場合、 $\text{PSO}_{\text{pp}}$  は解を導出できていないにも関わらず、解に基づく写像の傾きが 1 となる傾向があり、 $\text{PSO}_{\text{bif}}$  の目的関数  $F_{\text{bif}}$  は終了条件を満たしてしまう可能性がある [3]。

### 2.1 PSO を用いた周期点の探索: $\text{PSO}_{\text{pp}}$

$p$ -周期点の探索を考える。周期点条件は、

$$x_p = x_0 = f^p(x_0, \lambda) \quad (2)$$

として記述されるため、 $\text{PSO}_{\text{pp}}$  の目的関数  $F_{\text{pp}}$  は次式で記述できる [2]。

$$F_{\text{pp}}(x_0) = |f^p(x_0, \lambda) - x_0| < C_{\text{pp}} \quad (3)$$

### 2.2 PSO を用いた分岐パラメータの探索: $\text{PSO}_{\text{bif}}$

文献 [2] の手法では  $\text{PSO}_{\text{pp}}$  が導出した  $x_0$  に基づいた  $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$  を用いて  $\text{PSO}_{\text{bif}}$  の目的関数  $F_{\text{bif}}$  を設定した。

$$F_{\text{bif}}(\lambda) = \left| \frac{df^p}{dx_0}(x_0, \lambda) - 1.0 \right| < C_{\text{bif}} \quad (4)$$

しかし、前述したように SN 分岐点を正しく導出できない可能性がある。そこで、 $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  を用いた目的関数を設定する。

$$F_{\text{bif}}(\lambda) = \left| \frac{df^p}{dx_1}(x_1, \lambda) - 1.0 \right| < C_{\text{bif}} \quad (5)$$

$\text{PSO}_{\text{pp}}$  が式 (3) を満たして終了したならば、式 (4)(5) は同義である。一方、式 (3) の条件を満たさず終了した場合、

式 (5) を用いれば、写像の傾きが 1 となることを意図的に妨げる効用が期待できる。

## 3 適用例

提案手法を式 (6) に示す circle 写像に適用する。

$$\theta_{n+1} = \left( \theta_n + a - \frac{b}{2\pi} \sin 2\pi \theta_n \right) \bmod 1.0 \quad (6)$$

パラメータ  $a$  および  $b$  に関して、SN 分岐パラメータ導出を試みる。PSO の目的関数条件、各パラメータを以下のように設定する。

$$p = 2, C_{\text{pp}} = 10^{-5}, C_{\text{bif}} = 10^{-3} \\ N = 30, w = 0.5, \rho_1 = \rho_2 \in \text{RND}[0, 0.14] \quad (7)$$

表 1 に提案手法を用いて SN 分岐点を導出した際の分岐パラメータ  $a, b$  と周期点  $\theta_n$ 、 $\text{PSO}_{\text{pp}}$  の目的関数  $F_{\text{pp}}$ 、 $\text{PSO}_{\text{bif}}$  の目的関数  $F_{\text{bif}}$  の値を示す。提案アルゴリズムを繰り返し用いる事で 5 点導出したが、 $F_{\text{pp}}$ 、 $F_{\text{bif}}$  はすべて終了条件  $C_{\text{pp}}$ 、 $C_{\text{bif}}$  を満たしている。つまり、提案アルゴリズムを用いて SN 分岐点が導出できているといえる。

表 1: SN 分岐点を 5 点導出した計算結果

$a$	$b$	$\theta_n$	$F_{\text{pp}}(\theta_n)$	$F_{\text{bif}}(a, b)$
0.431833	1.395668	0.451678	8.95E-6	1.93E-4
0.464396	0.979452	0.430915	1.80E-6	7.19E-4
0.512991	0.577127	0.591437	9.65E-6	2.07E-4
0.547798	1.145807	0.560381	8.15E-6	6.35E-4
0.584847	1.574775	0.540069	2.97E-6	8.59E-4

## 4 おわりに

本稿では、2 つの PSO を用いた一次元離散時間力学系の分岐点導出法を拡張した。また、拡張手法を Circle 写像に適用し、有効性を確認した。

### 謝辞

本研究は、JSPS 科研費 16K16124 の助成を受けたものです。

### 参考文献

- [1] J. Kennedy and R. C. Eberhart, "Particle swarm optimization," in *Proc. of IEEE. Int. Conf. on Neural Netw.*, pp. 1942-1948, 1995
- [2] 富村, 黒川, 松下, 高坂, "粒子群最適化を用いた一次元離散時間力学系の周期倍分岐点導出法," *IEICE Tech. Rep.*, vol. 116, No. 151, NLP2016-35, pp. 9-12, 2016.
- [3] 松下, 富村, 黒川, 高坂, "2 つの PSO による分岐点導出手法のサドルノード分岐への適用," 2016 信学ソ大 (NOLTA), 2016. (印刷中)